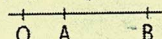


Cours – Séquence n° 9 – ESPACE (II) : orthogonalité, distance

Introduction : rappels de Première sur le produit scalaire dans le plan.

- O, A, B alignés

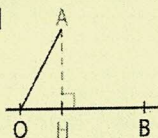


$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -OA \times OB$$

- H est le projeté orthogonal de A sur (OB) :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OB}$$



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2]$$

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs non nuls.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}; \vec{v}).$$

- Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

I- PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

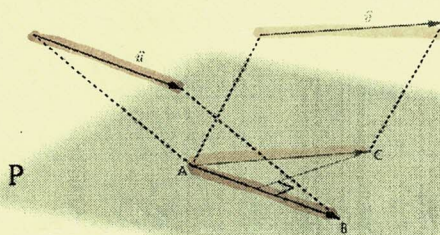
Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. A, B et C sont trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe au moins un plan P contenant les points A, B et C.

Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan P.

Propriétés

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \text{ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)}$$

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.

Le **carré scalaire** de $\vec{u}$, noté $\vec{u}^2$, est le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$.

Remarque

Ainsi pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ et pour tous points A et B, $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$.

Propriétés (admisses) : propriétés algébriques du produit scalaire

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un nombre réel.

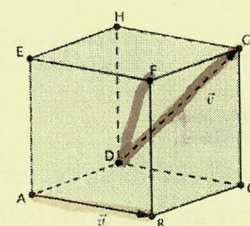
1. $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symétrie).
3. $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ et $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (bilinearité).
4. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ (égalités remarquables).
5. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ (formules de polarisation).

• Remarque

Conséquence des formules de polarisation : pour trois points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.

Exemple 1

ABCDEFGH est un cube d'arête un nombre réel $a > 0$.



1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \vec{AB}^2 \\ &= AB^2 \\ &= a^2 \end{aligned}$$

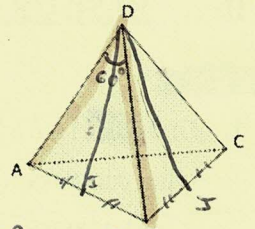
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DF}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}) \quad \text{par la relation de Chasles} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} \\ &= a^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \quad \text{d'après 1)} \\ &= a^2 + 0 \quad \text{car } \overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{GP} \\ &= a^2 \end{aligned}$$

Exemple 2

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête 6.

I et J sont le milieux respectifs des arêtes [AB] et [BC].



1. Calculer les produits scalaires suivants : $\vec{DA} \cdot \vec{DB}$, $\vec{DA} \cdot \vec{DC}$, $\vec{DB} \cdot \vec{DC}$, puis DI et DJ.

$$\vec{DA} \cdot \vec{DB} = DA \times DB \times \cos(\widehat{DAB})$$

$$\text{Par suite, } \vec{DA} \cdot \vec{DC} \text{ et } \vec{DB} \cdot \vec{DC} = 18$$

$$= 6 \times 6 \times \cos(60^\circ), \text{ car } ABD \text{ est équilatéral}$$

$$= 36 \times \frac{1}{2}$$

$$= 18$$

[DI] est la hauteur issue de D du triangle équilatéral ABD de côté 6

$$\text{Donc } DI = \frac{6\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

$$\text{Par suite, } DJ = 3\sqrt{3}$$

2. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{IDJ}$. On arrondira au dixième.

$$\vec{DI} \cdot \vec{DJ} = DI \times DJ \times \cos(\widehat{IDJ})$$

$$\vec{DI} \cdot \vec{DJ} = 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} \times \cos(\widehat{IDJ})$$

$$\vec{DI} \cdot \vec{DJ} = 27 \cos(\widehat{IDJ}) \quad (1)$$

$$\text{D'autre part, } \vec{DI} \cdot \vec{DJ} = \frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{DB}) \cdot \frac{1}{2}(\vec{DB} + \vec{DC})$$

$$= \frac{1}{4}(\vec{DA} \cdot \vec{DB} + \vec{DA} \cdot \vec{DC} + \vec{DB} \cdot \vec{DB} + \vec{DB} \cdot \vec{DC})$$

$$= \frac{1}{4}(18 + 18 + 36 + 18)$$

$$= \frac{1}{4}(90)$$

$$= 22,5 \quad (2)$$

$$\text{D'après (1) et (2), on obtient : } 27 \cos(\widehat{IDJ}) = 22,5 \quad (E)$$

$$(E) \Leftrightarrow \cos(\widehat{IDJ}) = \frac{22,5}{27}$$

$$(E) \Leftrightarrow \cos(\widehat{IDJ}) = \frac{5}{6}$$

$$(E) \Rightarrow \widehat{IDJ} \approx 33,6^\circ$$

II- BASE ORTHONORMÉE, REPÈRE ORTHONORMÉ

Définitions

1. Une **base** $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est **orthonormée** si :
 - les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux ;
 - les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont unitaires, soit : $\|\vec{i}\| = 1$, $\|\vec{j}\| = 1$ et $\|\vec{k}\| = 1$.
2. O étant un point, le **repère** $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est **orthonormé** lorsque la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

Propriétés : expression analytique du produit scalaire

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Démonstration

Dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' \vec{i}^2 + yy' \vec{j}^2 + zz' \vec{k}^2 + (xy' + yx') \vec{i} \cdot \vec{j} + (xz' + zx') \vec{i} \cdot \vec{k} + (zy' + yz') \vec{j} \cdot \vec{k}.$$

Or, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée, donc $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$; $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ et $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$. De plus, $\vec{i}^2 = 1$, $\vec{j}^2 = 1$ et $\vec{k}^2 = 1$.

D'où $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Exemple

Dans une base orthonormée de l'espace, $\vec{u}(1; 4; 0)$ et $\vec{v}(-2; 5; 1)$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$= 1 \times (-2) + 4 \times 5 + 0 \times 1$$

$$= -2 + 20 + 0$$

$$= 18$$

Propriétés : conséquences

- Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ sont deux vecteurs.
 1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à $xx' + yy' + zz' = 0$.
 2. $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ sont deux points.
 3. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Démonstration

1. $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ sont orthogonaux équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, c'est-à-dire $xx' + yy' + zz' = 0$.

2. $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$. Ainsi, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$. Ainsi, $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Exemple 1

Dans un repère orthonormé de l'espace, $\vec{u}(1; -2; 5)$ et $\vec{v}(1; 3; 1)$ sont deux vecteurs.

A(-1; 5; 3) et B(9; 5; -2) sont deux points.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= x x' + y y' + z z' \\ &= 1 \times 1 + (-2) \times 3 + 5 \times 1 \\ &= 0 \text{ donc } \vec{u} \perp \vec{v}\end{aligned}$$

2. Calculer la norme du vecteur $\vec{u}$.

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{1 + 4 + 25} ; \|\vec{v}\| = \sqrt{20}\end{aligned}$$

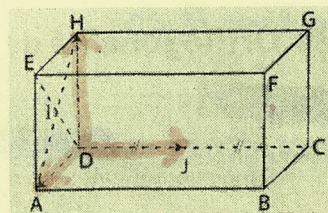
3. Calculer la distance AB.

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} & AB &= \sqrt{125} \\ &= \sqrt{(9+1)^2 + (5-5)^2 + (-2-3)^2} & &= \sqrt{25 \times 5} \\ &= \sqrt{100 + 0 + 25} & &= 5\sqrt{5}\end{aligned}$$

Exemple 2

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que AD = AE = 1 et AB = 2.

I est le centre du carré ADHE et J est le milieu de l'arête [DC].



1. Justifier que le repère $(D; \vec{DA}, \vec{DJ}, \vec{DH})$ est orthonormé.

• $(\vec{DA}, \vec{DJ}, \vec{DH})$ est une base, car les vecteurs $\vec{DA}$, $\vec{DJ}$ et $\vec{DH}$ ne sont pas coplanaires.
 • $\vec{DA} \perp \vec{DJ}$, $\vec{DH} \perp \vec{DJ}$ et $\vec{DA} \perp \vec{DH}$ et $\|\vec{DA}\| = \|\vec{DJ}\| = \|\vec{DH}\| = 1$ donc $(\vec{DA}, \vec{DJ}, \vec{DH})$ est une base orthonormée.
 donc $(D; \vec{DA}, \vec{DJ}, \vec{DH})$ est un repère orthonormé.

2. Les vecteurs $\vec{AG}$ et $\vec{HF}$ sont-ils orthogonaux ?

Donc le repère orthonormé $(D; \vec{DA}, \vec{DJ}, \vec{DH})$: A(1; 0; 0) ; G(0; 2; 1) ; H(0; 0; 1) et F(1; 2; 1)
 donc $\vec{AG} \begin{pmatrix} x_G - x_A \\ y_G - y_A \\ z_G - z_A \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{HF} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\vec{AG} \cdot \vec{HF} = (-1) \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 0$
 $= 3$. $\vec{AG} \cdot \vec{HF} \neq 0$ donc $\vec{AG}$ et $\vec{HF}$ ne sont pas orthogonaux.

3. Calculer la longueur BI.

$$\begin{aligned}B(1; 2; 0) \text{ et } I\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right) & \quad BI = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ BI &= \sqrt{(x_B - x_I)^2 + (y_B - y_I)^2 + (z_B - z_I)^2} \\ &= \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + (-2)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + 4 + \frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{9}{2}}\end{aligned}$$

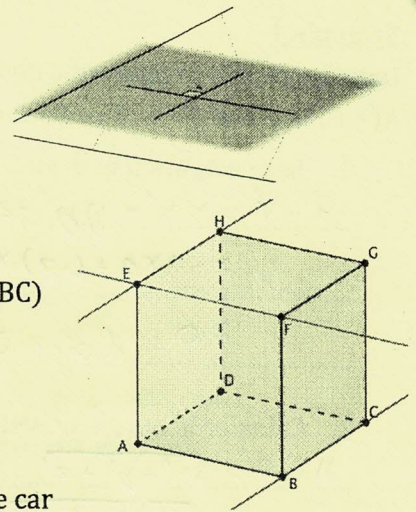
III- ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

Définition

Dire que deux droites de l'espace sont **orthogonales** signifie que leurs parallèles passant par un même point quelconque sont perpendiculaires.

Exemple

Dans le cube ABCDEFGH, les droites (BC) et (EF) sont orthogonales car la parallèle à (BC) passant par E est (EH) et (EH) est perpendiculaire à (EF).



Remarques

1. Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
2. Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque n'est pas vraie car deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et sécantes.

Propriété : conséquence

Deux droites d et d' de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonales si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$.

Démonstration

A est un point de l'espace, Δ et Δ' sont les parallèles aux droites d et d' passant par A.

Les droites Δ et Δ' admettent respectivement $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ comme vecteurs directeurs.

Par définition, les droites d et d' sont orthogonales si, et seulement si, les droites Δ et Δ' sont perpendiculaires, c'est-à-dire $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$.

Définition

Dire qu'une droite est **orthogonale** à un plan signifie qu'elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

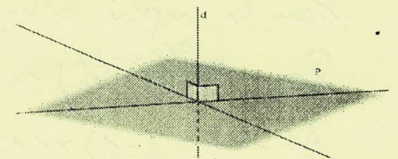
Propriété

Une droite d est orthogonale à un plan P si, et seulement si, d est orthogonale à deux droites sécantes de P.

Autrement dit : une droite d de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale à un plan P si, et seulement si, il existe deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de ce plan tels que $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

Démonstration

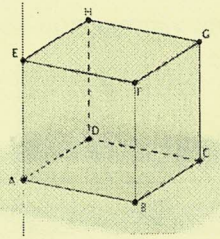
- ($\Rightarrow$) Supposons que d est orthogonale à un plan P.
Par définition, d est orthogonale à toute droite de ce plan.
En particulier, d est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
Ce qui est équivalent à dire qu'il existe deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de P tels que $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.
- ($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons qu'il existe deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de P tels que $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ où $\vec{n}$ est un vecteur directeur de d .
Soit D une droite quelconque de vecteur directeur $\vec{w}$, contenue dans le plan P.
Ainsi, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, donc il existe des réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
On a alors, $\vec{n} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\vec{n} \cdot \vec{u} + \beta\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$. Donc toute droite D de P est orthogonale à d .
Ainsi d est orthogonale à un plan P.



Exemple 1

On considère le cube ABCDEFGH ci-contre.

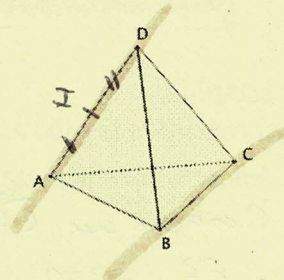
- La droite (EA) est orthogonale à deux droites sécantes (AB) et (AD) du plan (ABC). Donc la droite (EA) est orthogonale au plan (ABC).
- La droite (EA) est orthogonale au plan (ABC), elle est donc orthogonale à toute droite du plan (ABC), en particulier à la droite (BD).

**Exemple 2**

On considère le tétraèdre régulier d'arête un nombre réel $a > 0$.

On nomme I le milieu de l'arête [AD].

Démontrer par deux méthodes différentes que (AD) et (BC) sont orthogonales.



1^{ère} méthode : démonstration de l'orthogonalité avec le produit scalaire

$$\vec{AD} \cdot \vec{BC} = \vec{AD} \cdot (\vec{BA} + \vec{AC}) \text{, par la relation de Chasles}$$

$$= \vec{AD} \cdot \vec{BA} + \vec{AD} \cdot \vec{AC}$$

$$= -\vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AD} \cdot \vec{AC}$$

$$= -AD \times AB \times \cos(\vec{AD}, \vec{AB}) + AD \times AC \times \cos(\vec{AD}, \vec{AC})$$

$$= -a^2 \cos(60^\circ) + a^2 \cos(60^\circ)$$

$$= 0$$

$$\text{Donc } \vec{AD} \perp \vec{BC}$$

$$\text{Donc } (AD) \perp (BC)$$

2^{ème} méthode : démonstration de l'orthogonalité sans le produit scalaire

Montrons que (AD) est orthogonale à un plan contenant (BC)

- Dans le triangle ^{équilatéral} ABD, I est le milieu de [AD]

Donc (BI) est médiane et hauteur issue de B

$$\text{Donc } (BI) \perp (AD)$$

De même, dans le triangle ACD, (CI) $\perp$ (AD)

(AD) est orthogonale à deux droites sécantes (BI) et (CI) du plan (BIC)

$$\text{Donc } (AD) \perp (BIC)$$

Donc (AD) est orthogonale à toute la droite du plan (BIC)

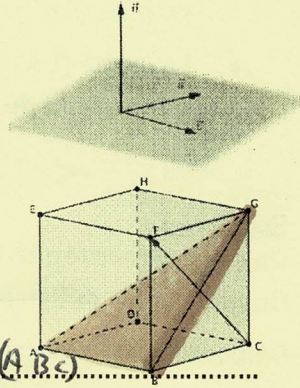
En particulier (BC) $\subset$ (BIC) Donc (AD) $\perp$ (BC)

Définition

Dire qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal** à un plan P signifie que toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan P.

Propriété (conséquence)

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan P si, et seulement si, il existe deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan P tels que $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

**Exemple 1**

On considère le cube ABCDEFGH ci-contre.

Démontrer que le vecteur $\vec{CF}$ est normal au plan (ABG).

Montrons que $\vec{CF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABG).

• $\vec{CF} \cdot \vec{EG} = 0$, car $\vec{CF} \perp \vec{EG}$ puisque [CF] et [EG] sont diagonales du carré BCFG.

• $\vec{CF} \cdot \vec{AB} = (\vec{CB} + \vec{BF}) \cdot \vec{AB}$ par la relation de Chasles.

$$\vec{CF} \cdot \vec{AB} = \vec{CB} \cdot \vec{AB} + \vec{BF} \cdot \vec{AB}$$

$$\vec{CF} \cdot \vec{AB} = 0 + 0 \text{ car } \vec{CB} \perp \vec{AB} \text{ et } \vec{BF} \perp \vec{AB}$$

$$\vec{CF} \cdot \vec{AB} = 0, \text{ donc } \vec{CF} \perp \vec{AB}$$

($\vec{BC}$; $\vec{AB}$) est un couple de vecteurs non colinéaires qui dirige le plan (ABC), donc $\vec{CF}$ est normal au plan (ABG).

Exemple 2

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas proportionnelles.

Donc ($\vec{AB}$, $\vec{AC}$) est un couple de vecteurs non colinéaires qui dirige (ABC).

Soit $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec a, b et c des réels non tous nuls.

$$\vec{n} \perp (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{AB} \\ \vec{n} \perp \vec{AC} \end{cases}$$

$$\vec{n} \perp (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{n} \perp (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b - 4c = 0 \\ a - 2b + 4c = 0 \end{cases}, c \in \mathbb{R}^*$$

$$\vec{n} \perp (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ -2 \times 2b + b = -3c \end{cases}, c \in \mathbb{R}^*$$

$$\vec{n} \perp (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ -3b = -3c \end{cases}, c \in \mathbb{R}$$

$$\vec{n} \perp (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b = c \end{cases}, c \in \mathbb{R}^*$$

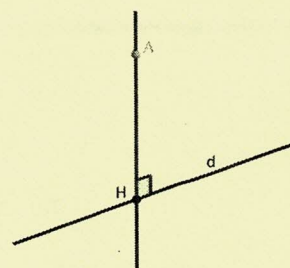
En particulier, si $c = 1$, donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC).

IV- PROJECTIONS ORTHOGONALES DANS L'ESPACE

Définition

Soit un point A et une droite d de l'espace.

Le **projeté orthogonal** de A sur d est le point H appartenant à d tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite d .



Remarque

Lorsque $A \in d$, le projeté orthogonal de A sur d est le point A lui-même.

Propriété : distance d'un point à une droite

Le projeté orthogonal H d'un point A sur une droite d est le point de d le plus proche de A .
On dit que AH est la distance du point A à la droite d .

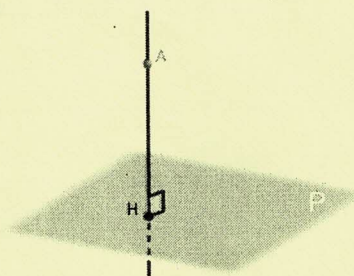
Démonstration

- Si $A \in d$, alors $AH = 0$ et H est le point de d le plus proche de A .
- Si $A \notin d$, alors pour tout point A' de d , le triangle AHA' est rectangle en H , donc son hypoténuse $[AA']$ est le côté le plus long. Donc $AA' > AH$. Donc H est le point de d le plus proche de A .

Définition

Soit un point A et un plan P de l'espace.

Le **projeté orthogonal** de A sur P est le point H appartenant à P tel que la droite (AH) soit orthogonale au plan P .



Remarque

Lorsque $A \in P$, le projeté orthogonal de A sur P est le point A lui-même.

Propriété : distance d'un point à un plan

Le projeté orthogonal H d'un point A sur un plan P est le point de P le plus proche de A .
On dit que AH est la distance du point A au plan P .

Démonstration *

- Si $A \in P$, alors $AH = 0$ et H est le point de P le plus proche de A .
- Si $A \notin P$, alors pour tout point A' de P , le triangle AHA' est rectangle en H , donc son hypoténuse $[AA']$ est le côté le plus long. Donc $AA' > AH$. Donc H est le point de P le plus proche de A .

Exemple

On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-contre.

- Le projeté orthogonal du point E sur le plan (CDG) est H.
En effet, la droite (EH) est orthogonale à deux droites sécantes (HG) et (HD) du plan (CDG) .
Ainsi, la droite passant par E et orthogonale au plan (CDG) est la droite (EH) . Elle coupe le plan (CDG) en H .
Ainsi, H est le projeté orthogonal de E sur la plan (CDG) .
- Le projeté orthogonal du point F sur la droite (CD) est C.
En effet, la droite (CD) est orthogonale à deux droites sécantes (CB) et (CG) du plan (BCG) .
Ainsi la droite (CD) est orthogonale au plan (BCG) et donc à toute droite de ce plan, en particulier (FC) .
Ainsi, la droite (FC) est perpendiculaire à la droite (CD) en C , donc C est le projeté orthogonal de F sur (CD) .

